模块五 抛物线与方程

第 1 节 抛物线定义、标准方程及简单几何性质（★☆）

强化训练

1．（2023·四川成都模拟·★）抛物线 $x=4y^2$ 的准线方程是_____.

答案： $x=-\dfrac{1}{16}$

解析： 先化标准方程，$x=4y^2\Rightarrow y^2=\dfrac{1}{4}x$，所以抛物线开口向右，且 $2p=\dfrac{1}{4}$，故 $p=\dfrac{1}{8}$，

所以抛物线的准线方程是 $x=-\dfrac{1}{16}$.

2．（2023·全国乙卷·★）已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则点 A 到 C 的准线的距离为_____.

答案： $\dfrac{9}{4}$

解析： 点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线上 $\Rightarrow(\sqrt{5})^2=2p\cdot 1\Rightarrow p=\dfrac{5}{2}$，

所以抛物线的准线为 $x=-\dfrac{5}{4}$，

故 A 到该准线的距离 $d=1-(-\dfrac{5}{4})=\dfrac{9}{4}$.

3．（2021·新高考Ⅱ卷·★）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）4

答案： B

解析： $y=x+1\Rightarrow x-y+1=0$，由题意，焦点 $(\dfrac{p}{2},0)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{p}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，

结合 $p>0$ 可解得：$p=2$.

4．（2023·内蒙古模拟·★）顶点在原点，对称轴为坐标轴，且经过 $P(4,-2)$ 的抛物线的标准方程是（　　）

（A）$y^2=x$ 或 $x^2=y$　　（B）$y^2=-x$ 或 $x^2=8y$　　（C）$x^2=-8y$ 或 $y^2=x$　　（D）$x^2=-8y$ 或 $y^2=-x$

答案： C

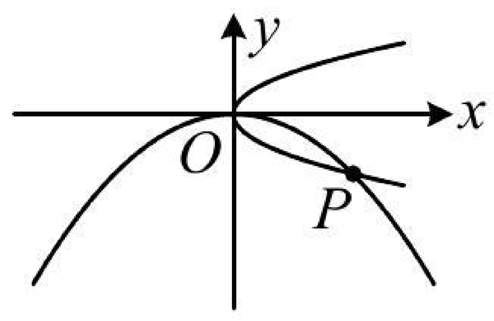
解析： 抛物线过点 $P(4,-2)$，有如图所示的两种情况，下面分别考虑，

若开口向右，则可设其方程为 $y^2=2px(p>0)$，

将点 $P(4,-2)$ 代入可得 $(-2)^2=2p\cdot 4$，解得：$p=\dfrac{1}{2}$，所以抛物线的方程为 $y^2=x$；

若开口向下，则可设其方程为 $x^2=-2my(m>0)$，

将点 $P(4,-2)$ 代入可得 $4^2=-2m\cdot(-2)$，解得：$m=4$，所以抛物线的方程为 $x^2=-8y$；故选 C.



5．（2023·陕西渭南二模·★★）将抛物线 $y^2=mx$ 绕其顶点顺时针旋转 $90°$ 后，正好与抛物线 $y=2x^2$ 重合，则 $m=$（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）2

答案：A

解析：给的是旋转后的抛物线，可找到其焦点，反向旋转回去，找到原来抛物线的焦点，

$y=2x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}y$，所以该抛物线开口向上，且 $2p=\frac{1}{2}$，所以 $p=\frac{1}{4}$，故其焦点坐标为 $(0,\frac{1}{8})$，

将 $(0,\frac{1}{8})$ 绕原点逆时针旋转 $90°$ 后会变成 $(-\frac{1}{8},0)$，所以抛物线 $y^2=mx$ 的焦点为 $(-\frac{1}{8},0)$ ①，

故其开口向左，设其标准方程为 $y^2=-2tx(t>0)$，则其焦点坐标为 $(-\frac{t}{2},0)$，

与①比较得 $-\frac{t}{2}=-\frac{1}{8}$，所以 $t=\frac{1}{4}$，故 $m=-2t=-\frac{1}{2}$.

6．（2022·上海模拟·★★）已知点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上且横坐标为 8，O 为原点，若 ΔOFP 的面积为 $2\sqrt{2}$，则该抛物线的准线方程为_____.

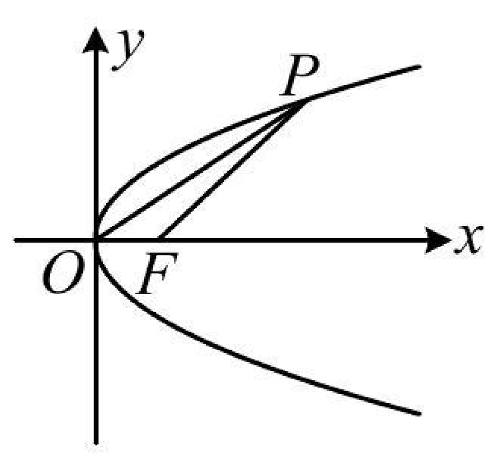
答案：$x=-1$

解析：如图，给了点 P 的横坐标，可代入抛物线的方程求其纵坐标，并用它计算 ΔOFP 的面积，

由题意，$F(\frac{p}{2},0)$，$|OF|=\frac{p}{2}$，$x_P=8\Rightarrow y_P^2=2px_P=16p\Rightarrow y_P=\pm4\sqrt{p}$，

所以 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times4\sqrt{p}=p\sqrt{p}$，又 $S_{\Delta OFP}=2\sqrt{2}$，所以 $p\sqrt{p}=2\sqrt{2}$，故 $p=2$，

所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

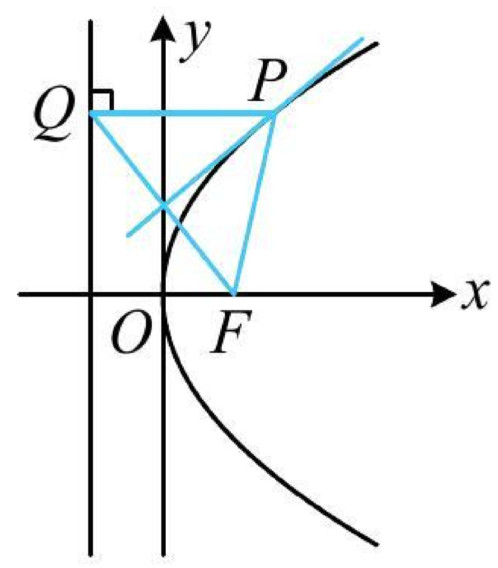


7．（2020·北京卷·★）设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l，P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线（　　）

（A）经过点 O　　（B）经过点 P　　（C）平行于直线 OP　　（D）垂直于直线 OP

答案：B

解析：由抛物线定义，$|PF|=|PQ|$，所以 ΔPQF 为等腰三角形，线段 FQ 的垂直平分线过点 P.



8．（2022·广东模拟·★★）已知点$A(m,2)$为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上一点，过A作C的准线的垂线，垂足为B，若ΔAOB的面积为2，其中O为原点，则p等于（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）4

答案：C

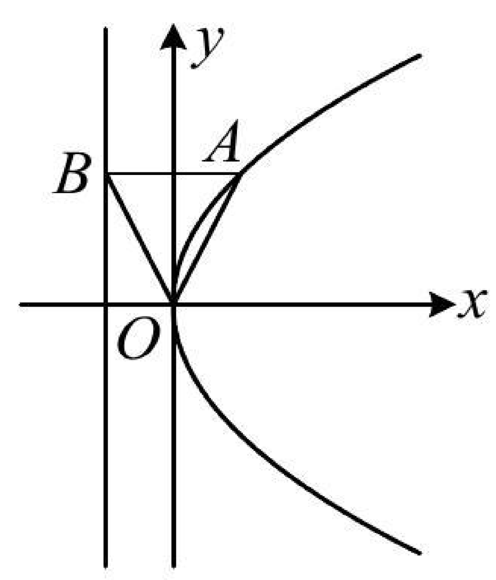
解析：条件给了$S_{\Delta AOB}$，故用它建立方程求p，观察图形发现以$|AB|$为底，高即为点A的纵坐标，是已知的，而$|AB|$可用A的横坐标来算，已知纵坐标，代入抛物线方程就能求得横坐标，

因为$A(m,2)$在抛物线C上，所以$2^2=2p\cdot m$，故$m=\frac{2}{p}$，

又抛物线C的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，所以$|AB|=\frac{2}{p}+\frac{p}{2}$，

故$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times(\frac{2}{p}+\frac{p}{2})\times2=\frac{2}{p}+\frac{p}{2}$，

由题意，$S_{\Delta AOB}=2$，所以$\frac{2}{p}+\frac{p}{2}=2$，解得：$p=2$.



9．（2022·北京模拟·★★★）已知点$Q(2\sqrt{2},0)$及抛物线$x^2=4y$上一动点$P(x,y)$，则$y+|PQ|$的最小值是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）3

答案：C

解析：如图，直接分析$y+|PQ|$的最小值不易，可考虑把y凑成$y+1$，用定义转化为$|PF|$再看，

抛物线的焦点为$F(0,1)$，准线为$y=-1$，由抛物线定义，$|PF|=y+1$，所以$y=|PF|-1$，

故$y+|PQ|=|PF|-1+|PQ|=|PF|+|PQ|-1$ ①，

由三角形两边之和大于第三边可得$|PF|+|PQ|\ge|FQ|$，

结合①可得 $y+|PQ|\geq |FQ|-1=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(0-1)^2}-1=2$，

当且仅当 P 与图中 P_0 重合时取等号，所以 $(y+|PQ|)_{\min}=2$.